Аналитический метод исследования характеристических уравнений

Быстров В.С., Камышлов В.В. (gatorado@rambler.ru)

Институт математических проблемм биологии РАН, Пущино, Россия

1. Введение

При исследовании характеристических полиномов различных степеней, возникает необходимость выразить корни этих полиномов через их коэффициенты. Kml-функции позволяют решить эту задачу в общем виде, то есть получить функциональную зависимость между коэффициентами полинома и его корнями. Необходимо отметить, что чем больше членов в полиноме, тем более выокий порядок имеют соответствующие Kml-функции, и более сложными становятся ряды и группы рядов, которые представляют данные функции в различных областях комплексной плоскости. Поэтому, в тех случаях, когда путем подстановок возможно сократить число членов полинома это нужно делать для того, чтобы решение имело более простой вид.

2.Выражение корней характеристического полинома через коэффициенты

2.1.Упрощение характеристического полинома третьего порядка

Рассмотрим характеристический полином третьего порядка:

$$m_1 m_2 p^3 + m_1 m_2 p^2 + m_2 p + 1 = 0 \tag{1}$$

где m_1 и m_2 - коэффициенты уравнения, положительные.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$p^3 + p^2 + \frac{1}{m_1} p + \frac{1}{m_1 m_2} = 0 \tag{2}$$

Приведем уравнение (2) четырехчлена к трехчленному уравнению вида:

$$q^m + p_{m-l} q^l + p_m = 0 \tag{3}$$

где m и l - нечётные.

Для этого возьмем производные от уравнения (2):

$$f'(p) = 3p^2 + 2p + \frac{1}{m_1} = 0;$$

$$f''(p) = 6p + 2 = 0.$$

Откуда, $p = -\frac{1}{3}$.

Выполним подстановку $p = q - \frac{1}{3}$ в уравнение (2) и получим:

$$(q - \frac{1}{3})^3 + (q - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{m_1}(q - \frac{1}{3}) + \frac{1}{m_1 m_2} = 0 \tag{4}$$

После возведения в степень и соответствующим преобразованием в уравнении (4) получим:

$$q^3+\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{3}\right)q+\left(\frac{1}{m_1m_2}-\frac{1}{3m_1}+\frac{2}{27}\right)=0 \qquad (5)$$

В уравнении (5) согласно (3):

$$p_m=\frac{1}{m_1m_2}-\frac{1}{3m_1}+\frac{2}{27};$$
$$p_{m-l}=\frac{1}{m_1}-\frac{1}{3};m=3;l=1. \qquad (6)$$

2.1.Нахождение областей с корнями различного вида

В трехчленном уравнении (3) с нечетными показателями степеней, корни могут иметь следующий вид [1]:

1.Один корень действительный и два корня комплексно - сопряженные при

$$\left|\frac{p_{m-l}\sqrt[m]{-p_m}}{mp_m}\right|<\left|\sqrt[m]{\frac{1}{(m-l)^{m-l}l^l}}\right| \qquad (7)$$

или учитывая (6):

$$\left|\frac{\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{-\left(\frac{2}{27}-\frac{1}{3m_1}+\frac{1}{m_1m_2}\right)}}{3\left(\frac{2}{27}-\frac{1}{3m_1}+\frac{1}{m_1m_2}\right)}\right|<\left|\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right| \qquad (8)$$

2.Три разных действительных корня при

$$\left|\frac{p_{m-l}\sqrt[m]{-p_m}}{mp_m}\right|>\left|\sqrt[m]{\frac{1}{(m-l)^{m-l}l^l}}\right| \qquad (9)$$

или

$$\left|\frac{\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{-\left(\frac{2}{27}-\frac{1}{3m_1}+\frac{1}{m_1m_2}\right)}}{3\left(\frac{2}{27}-\frac{1}{3m_1}+\frac{1}{m_1m_2}\right)}\right|>\left|\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right| \qquad (10)$$

3. Три действительных корня, из которых два равных при

$$\left|\frac{p_{m-l}\sqrt[m]{-p_m}}{mp_m}\right|=\left|\sqrt[m]{\frac{1}{(m-l)^{m-l}l^l}}\right| \qquad (11)$$

или

$$\left|\frac{(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{3})\sqrt[3]{-(\frac{2}{27}-\frac{1}{3m_1}+\frac{1}{m_1m_2})}}{3(\frac{2}{27}-\frac{1}{3m_1}+\frac{1}{m_1m_2})}\right|=\left|\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right| \qquad (12)$$

Найдем область значений m_1 и m_2, для которых выполняются неравенства (8) и (10). Для этого построим кривую в системе координат m_1 и m_2, в каждой точке которой выполняется условие (12), которое можно переписать в виде:

$$-4(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{3})^3=27(\frac{2}{27}-\frac{1}{3m_1}+\frac{1}{m_1m_2})^2 \qquad (13)$$

Легко заметить в равенстве (13), что для $0<m_1<3$ выполняется неравенство (8) пункта 1 при всех значениях m_2.

Значения m_2 при которых выполняется (12) для $m_1\geq 3$ находим из (13):

$$\frac{1}{m_2}=\frac{1}{3}-\frac{2m_1}{27}\pm\frac{2m_1}{3\sqrt{3}}(\frac{1}{3}-\frac{1}{m_1})\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{m_1}} \qquad (14)$$

Появился знак ±, поскольку из кубического корня выделено член под квадратным корнем.

Из выражения (14), задаваясь $m_1\geq 3$ находим значение m_2, причем

$$\frac{1}{m_2}=\frac{1}{3}-\frac{2m_1}{27}+\frac{2m_1}{3\sqrt{3}}(\frac{1}{3}-\frac{1}{m_1})\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{m_1}} \qquad (15)$$

$$\frac{1}{m_2}=\frac{1}{3}-\frac{2m_1}{27}-\frac{2m_1}{3\sqrt{3}}(\frac{1}{3}-\frac{1}{m_1})\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{m_1}} \qquad (16)$$

Результаты расчетов полученные из выражений (15) и (16) сведены в Таблицу1 (Приложение 1), а вид искомых областей представлен на Рисунке 1 (Приложение 2).

Из построения на Рисунке 1 видно, что заштрихованная область - это область, где выполняется условие (10) (корни характеристического уравнения действительные, разные)

Область без штриховки - это область, где выполняется условие (8) (один корень действительный, а остальные два - комплексно-сопряжённые).

Для точек границы выполняется условие (12), то есть все три корня действительные, из которых два являются кратными корнями.

Поскольку коэффициенты m_1 и m_2 положительные, то нас будет интересовать только первый квадрант.

2.2.Нахождение корней трехчленного полинома в общем виде

В общем виде корни трехчленного полинома (5) могут быть представлены в виде [2]:

$$L(z)=z^m+p_{m-l}z^l+p_m \qquad (17)$$

где p_{m-l}, p_m комплексные числа ($p_m\neq 0$).

Корни полинома (17) для заштрихованной области (при разных действительных коэффициентах) могут быть представлены в виде:

$$z_j = \sqrt[m-l]{-p_{m-l}}\,K'_{ml}(\beta_{\mathrm{ml}}), \quad j = 1, 2, ..., m-l. \tag{18}$$
$$z_j = \sqrt[l]{-\frac{p_m}{p_{m-l}}}\,K''_{ml}(\gamma_{ml}), \; j = m-l+1, m-l+2, ..., m.$$

В выражении (18) β_{ml} и γ_{ml} параметры, образованные из коэффициентов полинома и его степеней, а $K'_{ml}(\beta_{ml})$ и $K''_{ml}(\gamma_{ml})$ бесконечные степенные ряды :

$$\beta_{ml} = -\frac{1}{m-l}\,p_m(-p_{m-l})^{-\frac{m}{m-l}}$$
$$\gamma_{ml} = -\frac{1}{l}(-p_m)^{\frac{m}{l}-1}(p_{m-l})^{-\frac{m}{l}} \tag{19}$$

$$K'_{ml}(\beta_{ml}) = 1 + \beta_{ml} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta_{ml}^n}{n!}\prod_{i=1}^{n=1}\left[(i-n)l + 1 - im\right]$$
$$K''_{ml}(\gamma_{ml}) = 1 + \gamma_{ml} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\gamma_{ml}^n}{n!}\prod_{i=1}^{n=1}(nm + 1 - il) \tag{20}$$

Запишем ряды (20) в развернутой форме:

$$K'_{ml}(\beta_{ml}) = 1 + \beta_{ml} + \frac{\beta_{ml}^2}{2!}(-1l+1-1m) + \frac{\beta_{ml}^3}{3!}(-2l+1-1m)(-1l+1-2m) + \frac{\beta_{ml}^4}{4!} *$$
$$* (-3l+1-1m)(-2l+1-2m)(-1l+1-1m) + ... \tag{21}$$

$$K''_{ml}(\gamma_{ml}) = 1 + \gamma_{ml} + \frac{\gamma_{\mathrm{ml}}^2}{2!}(2m+1-1l) + \frac{\gamma_{ml}^3}{3!}(3m+1-1l)(3m+1-2l) + \frac{\gamma_{ml}^4}{4!} *$$
$$* (4m+1-1l)(4m+1-2l)(4m+1-3l) + ... \tag{22}$$

Для незаштрихованной области (один корень действительный,
а два комплексно-сопряжённые) корни полинома (17) могут быть представлены в форме:

$$z_j = \sqrt[m]{-p_m}\,K_{ml}(\alpha_{ml}), \quad j = 1, 2, ..., m. \tag{23}$$

$$\alpha_{ml} = -\frac{1}{m}\,p_{m-l}(-p_m)^{\frac{l-m}{m}} \tag{24}$$

$$K_{ml}(\alpha_{ml}) = 1 + \alpha_{ml} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha_{ml}^n}{n!}\prod_{i=1}^{n=1}(nl + 1 - im) \tag{25}$$

Запишем ряд (25) в развернутой форме:

$$K_{ml}(\alpha_{ml}) = 1 + \alpha_{ml} + \frac{\alpha_{\mathrm{ml}}^2}{2!}(2l+1-1m) + \frac{\alpha_{ml}^3}{3!}(3l+1-1m)(3l+1-2m) + \frac{\alpha_{ml}^4}{4!} *$$
$$* (4l+1-1m)(4l+1-2m)(4l+1-3m) + ... \tag{26}$$

На границе, разделяющей обе области, сходятся и ряды (21) и ряд (26), то есть это случай кратных корней.

3.Примеры использования аналитического метода

3.1.Для нечетных m_1 и m_2

Приведем несколько конкретных примеров.

Пример 1. Пусть $m_1=5;\ m_2=3$.
Из выражения (6):

$$p_{m-l}=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=-0.1333....$$
$$p_m=\frac{1}{5\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{27}=0.0741. \tag{27}$$

Проверяем условие (7):

$$\left|\frac{-0,1333\sqrt[3]{-0,0741}}{3\cdot 0.0741}\right|<\left|\sqrt[3]{\frac{1}{(3-1)^{3-1}\cdot 1^1}}\right| \ ; \tag{28}$$

$$|0,25184|<|0,62996|.$$

При заданных значениях $m_1=5;\ m_2=3$ исходное уравнение (1) имеет вид:

$$15p^3+15p^2+3p+1=0; \tag{29}$$

Приведенное трехчленное уравнение :

$$q^3-0.1333q+0.0741=0; \tag{30}$$

Уравнения (29) и (30) будут иметь один действительный и два комплексно-сопряжённых корня. Так как уравнения (29) и (30) идиентичны с точки зрения корней, то будем решать уравнение (30) при помощи Kml-функций первого порядка. Из выражения (24) определяем численные значения α_{ml} -параметра:

$$\alpha_{ml}=-\frac{1}{3}\cdot(-)0,1333\cdot(-0,0741)^{\frac{1-3}{3}}=0,0444\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{-0,0741}}\right)^2=$$
$$=0,42\left[\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+j\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right]^{-2},k=0,1,2. \tag{31}$$

Так как максимальная степень полинома равна трем, то α_{ml} -параметр принимает три значения:

$$\alpha_{ml_1}=0,2519\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$
$$\alpha_{ml_2}=0,2519;$$
$$\alpha_{ml_3}=0,2519\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{32}$$

Подставляем полученные значения в ряд (26):

$$K_{ml}(0,2519)=1+0,2519+\frac{0,2519^2}{2!}(2\cdot 1+1-3)+\frac{0,2519^3}{3!}(3\cdot 1+1-3)(3\cdot 1+1-2\cdot 3)+$$
$$+\frac{0,2519^4}{4!}(4\cdot 1+1-3)(4\cdot 1+1-2\cdot 3)(4\cdot 1+1-3\cdot 3)+...=1,2479 \tag{33}$$

Тогда значение действительного корня согласно (23) равно:

$$q_2=\sqrt[3]{-0,0741}\cdot 1,2479=-0,52414. \tag{34}$$

Определим другие два комплексно-сопряжённых корня q_1 и q_3:

$$q_1 = 0,42(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot K_{ml}(0,2519(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})) =$$

$$\Bigg[1 + 0,2519(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{0,2519^2}{2!}(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})^2(2\cdot 1 + 1 - 1\cdot 3) +$$

$$+\frac{0,2519^3}{3!}(-\frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2})^3(3\cdot 1 + 1 - 1\cdot 3)(3\cdot 1 + 1 - 2\cdot 3) +$$

$$+\frac{0,2519^4}{4!}(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})^4(4\cdot 1 + 1 - 1\cdot 3)(4\cdot 1 + 1 - 2\cdot 3)(4\cdot 1 + 1 - 3\cdot 3)\Bigg] =$$

$$= 0,42(0,623949+\mathrm{j}0,64211)=0,26205+\mathrm{j}0,2696862.$$

(35)

Аналогично находится третий корень.

q_3=0,26205-j0,2696862. (36)

Для перехода к корням исходного уравнения сделаем замену :

$$p = q - \frac{1}{3};$$

$$p_1 = -0,07128 + j0.2697; \qquad (37)$$

$$p_1 = -0,85747;$$

$$p_1 = -0,07128 - j0.2697;$$

3.1.Для нечетных m_1 и m_2

Приведем еще один пример с четными значениями m_1 и m_2.

Возьмем m_1=4; m_2=16.

Из выражения (6):

$$p_{m-l} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -0.08333....$$

$$p_m = \frac{1}{4\cdot 16} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{2}{27} = 0.006366. \qquad (38)$$

Проверяем условие (7):

$$\left|\frac{-0,083333\cdot\sqrt[3]{-0,006366}}{3\cdot 0,006366}\right| < \left|\sqrt[3]{\frac{1}{(3-1)^{3-1}\cdot 1^1}}\right| \;;$$

$|0,8088| < |0,62996|$.(не верно)

Условие (7) не выполняется, значит автоматически выполняется условие (9).

При заданных значениях m_1=4; m_2=16 исходное уравнение (1) имеет вид:

$$64p^3 + 64p^2 + 16p + 1 = 0; \qquad (39)$$

Приведенное трехчленное уравнение :

$$p^3 - 0.08333p + 0.006366 = 0; \qquad (40)$$

Уравнения (29) и (30) будут иметь три действительных разных корня.

Определяем β_{ml} и γ_{ml} параметры:

$$\beta_{ml} = -\frac{1}{m-l} p_m (-p_{m-l})^{-\frac{m}{m-l}}; \qquad (41)$$

$$\beta_{ml} = -\frac{1}{3-1} \cdot 0,006366 \cdot (0,083333)^{\frac{3}{3-1}} = \pm 0,13232279; \qquad (42)$$

$$\gamma_{ml} = -\frac{1}{l} (-p_m)^{\frac{m}{l}-1} (p_{m-l})^{-\frac{m}{l}};$$

$$\gamma_{ml} = -\frac{1}{1} \cdot (-0,006366)^{\frac{3}{1}-1} \cdot (-0,083333)^{\frac{3}{1}} = 2,3434687 \cdot 10^{-8}$$

Подставим полученные значения β_{ml} и γ_{ml} соответственно в (21) и (22).

$$K'_{ml}(-0,13232279) = 1 + (-0,13232279) + \frac{(-0,13232279)^2}{2!} \cdot (-1+1-3) +$$
$$+ \frac{(-0,13232279)^3}{3!} \cdot (-2+1+3) \cdot (-1+1-6) + \frac{(-0,13232279)^4}{4!} \cdot (-3+1-3) \times \qquad (43)$$
$$\times (-2+1-6)(-1+1-9) = 0,8308046;$$

$$K'_{ml}(0,13232279) = 1 + (0,13232279) + \frac{(0,13232279)^2}{2!} \cdot (-1+1-3) + \qquad (44)$$
$$+ \frac{(0,13232279)^3}{3!} \cdot (-2+1+3) \cdot (-1+1-6) + \frac{(0,13232279)^4}{4!} \cdot (-3+1-3) \times$$
$$\times (-2+1-6)(-1+1-9) = 1,0974;$$

$$K''_{ml}(2,3434687 \cdot 10^{-8}) = 1 + 2,3434687 \cdot 10^{-8} + \frac{(2,3434687 \cdot 10^{-8})^2}{2!} \cdot (6+1-1) + \qquad (45)$$
$$+ \frac{(2,3434687 \cdot 10^{-8})^3}{3!} \cdot (9+1-1) \cdot (9+1-2) + \frac{(2,3434687 \cdot 10^{-8})^4}{4!} \times$$
$$\times (12+1-1) \cdot (12+1-2) \cdot (12+1-3) = 1,000000235$$

Тогда значение корней согласно (18):

$$q_1 = \sqrt{0,083333} \cdot 0,8308046 = 0,23983;$$
$$q_2 = -\sqrt{0,083333} \cdot 1,0974 = -0,317; \qquad (46)$$
$$q_3 = 0.0764 \cdot 1,000000235 = 0.0764;$$

Для перехода к корням исходного уравнения сделаем замену :

$$p = q - \frac{1}{3};$$
$$p_1 = -0,0935; \qquad (47)$$
$$p_2 = -0,65;$$

$p_3 = -0,257;$

Некоторое расхождение полученных значений корней и точных значений этих корней, объясняется небольшим количеством членов рядов взятых при суммировании.

4.Выводы по статье

Как видно из полученных результатов, аналитический метод исследования характеристических полиномов при помощи Kml-функций первого порядка дает возможность выразить корни любого трехчленного полинома через его коэффициенты в виде бесконечных рядов. Кроме того, этот метод позволяет определить области сходимости этих рядов. Поэтому , для любых значений степеней и коэффициентов трехчленного полинома можно построить аналитическую зависимость между корнями и коэффициентами (при меняющихся коэффициентах и постоянных показателях степеней) и корнями и показателями степеней (при меняющихся показателях степеней и постоянных коэффициентах). Для четырехчленных полиномов аналогичная задача может быть решена двумя путями. Либо путем приведения к трехчленному и соответственно через Kml-функции первого порядка, либо напрямую через Kml-функции второго порядка. Для пяти- и шестичленного полинома необходимо использовать Kml-функции третьего и четвертого порядков. В этих случаях выражения для корней также могут быть получены в виде бесконечных рядов, но уже от двух, трех и более переменных, что делает исследование этих рядов более сложным. Этот вопрос является интересным и его исследованию будут посвящены другие статьи.

Литература

1. Кравченко Ф.Г. Элементарные K_{ml}-функции и их свойства. Киев: Вычислительная и прикладная математика, вып.11,1970.-171 с.

2. Кравченко Ф.Г. Камишлов В. В. Кравченко В. Ф. Формальні операції над елементами аналітичних функцій . Обернення елементів Kml-функцій,- Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного педагогічного університету.-Випуск 5, 1999.

№ п./п.	m_1	m_2'	m_2''
1	3	9	9
2	3,5	11,6	16,7
3	4,0	13,5	$\pm\infty$
4	4,5	15,57	-15,57
5	5,0	17,3	-7,8
6	5,3	20,0	-5,0
7	6,0	21,7	-3,7
8	6,5	23,8	-2,9
9	7,0	25,8	-2,5
10	7,5	28,4	-2,0
11	8,0	29,8	-1,8
12	9,0	33,8	-1,4
13	10,0	37,8	-1,18
14	21,0	81,9	-0,4
15	31,0	121,9	-0,25
16	41,0	161,9	-0,18
17	51,0	201,9	-0,14
18	61,0	241,0	-0,12
19	71,0	281,9	-0,1
20	81,0	321,9	-0,088
21	91,0	361,9	-0,078

Приложение 1.

Таблица 1.Данные для построения графика зависимости m_2 от m_1 .

Приложение 2.

Рисунок 1. Области расположения корней на плоскости в зависимости от значений коэффициентов m_1 и m_2

.